反ド・ジッター空間の時間的平均曲率 1 曲面における特異点の双対性

横浜国立大学　大学院理工学府　数物電子情報系理工学専攻
伊坂麻琴 (Makoto ISAKA) *

概要

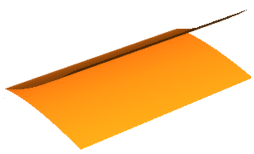
本講演では，3 次元反ド・ジッター空間の特異点を許容する時間的平均曲率 1 曲面 (時間的 CMC1 曲面) のクラスとして**時間的** CMC1 **面**を導入し，特異点に関する結果を紹介する．特に，時間的 CMC1 面は折り目特異点を許容しないこと，また一般化錐状特異点が共役曲面における 5/2-カスプ辺と対応することやカスプ状 S_1 特異点が共役曲面におけるジェネリックなカスプ状バタフライと対応することを述べる．

1　導入

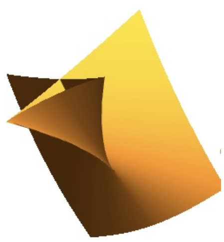
3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^3_1$ の時間的極小曲面は，3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の極小曲面の類似として，Weierstrass 型の表現公式をもつ．直和 $\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}$ に $j^2 = 1$, $j1 = 1j = j$ を満たす積をもつ可換環を $\check{\mathbb{C}}$ で表し，**パラ複素数代数**という．U を $\check{\mathbb{C}}$ 上の単連結領域，g を U 上の p-正則関数, ω を U 上の p-正則 1 次微分形式とするとき

$$f = \mathrm{Re} \int (-1 - g^2, j(1 - g^2), 2g)\omega$$

により時間的極小曲面が与えられる (Konderak [10])．このとき，(g, ω) の組を **Weierstrass データ**と呼ぶ．Takahashi [12] は**極小面**と呼ばれる，特異点を許容する時間的極小曲面のクラスを導入した (cf. Akamine [1])．



カスプ辺



ツバメの尾

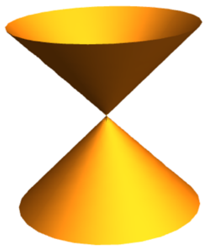
カスプ状
交差帽子

$\mathbb{R}^2$ の領域 U から 3 次元多様体 M^3 への C^∞ 級写像 $f : U \to M^3$ に対して，点 $p \in U$ が **カスプ辺**

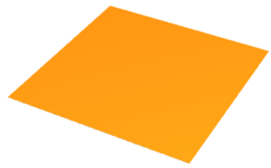
* E-mail: isaka-makoto-km@ynu.jp

であるとは，f の p における写像芽が，$f_{ce}(u,v) := (u^2, u^3, v)$ の原点における写像芽と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう．同様に，点 $p \in U$ が**ツバメの尾** (resp. **カスプ状交差帽子**) であるとは，f の p における写像芽が $f_{sw}(u,v) := (3u^4 + u^2, 4u^3 + 2uv, v)$ (resp. $f_{ccr}(u,v) := (u, v^2, uv^3)$) の原点における写像芽と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう．ここで 2 つの写像芽 $f : (U,p) \to (M^3, f(p))$, $g : (\mathbb{R}^2, q) \to (\mathbb{R}^3, g(q))$ が **$\mathcal{A}$-同値**であるとは，局所微分同相写像芽 $\varphi : (U,p) \to (\mathbb{R}^2, q)$, $\phi : (M^3, f(p)) \to (\mathbb{R}^3, g(q))$ が存在して，$g = \phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ を満たすときをいう．

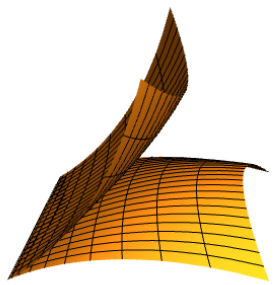
一方，一般的に現れる特異点以外に極小面に現れる特異点として，錐状特異点，折り目特異点，カスプ状バタフライ，カスプ状 S_1^+ 特異点が知られている．ここで，**錐状特異点** (resp. **折り目特異点**) とは，$f_{\mathsf{cone}}(u,v) := v(\cos u, \sin u, 1)$ (resp. $f_{\mathsf{fold}}(u,v) := (u, v^2, 0)$) と $\mathcal{A}$-同値な特異点である．さらに，**カスプ状 S_1 特異点** (resp. **カスプ状バタフライ**) とは，$f_{cs_1^{\pm}}(u,v) := (u, v^2, v^3(u^2 \pm v^2))$ (resp. $f_{bu}(u,v) := (u, 4v^5 + uv^2, 5v^4 + 2uv)$) と $\mathcal{A}$-同値な特異点である．



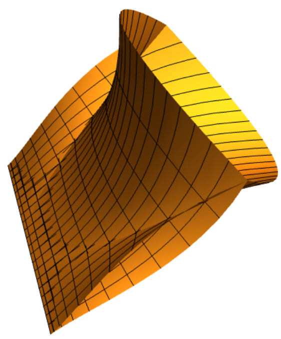
一般化錐状特異点



折り目特異点



カスプ状 S_1^+ 特異点



カスプ状 S_1^- 特異点

カスプ状バタフライ

Weierstrass データを $(g, j\omega)$ に取り換えることで，共役な時間的極小曲面

$$f^\sharp = \mathrm{Im} \int (-1 - g^2, j(1 - g^2), 2g)\omega$$

が定義される．次のような極小面における特異点の双対性が知られている．U をパラ複素平面 $\check{\mathbb{C}}$ の単連結領域とし，$f : U \to \mathbb{R}^3_1$ を極小面，$f^\sharp : U \to \mathbb{R}^3_1$ を f の共役極小面，$p \in U$ を f の特異点とする．このとき以下が成り立つ：

(1) f が $p \in U$ においてカスプ辺をもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ においてカスプ辺をもつことである [12].

(2) f が $p \in U$ においてツバメの尾をもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ においてカスプ状交差帽子をもつことである [12].

(3) f が $p \in U$ において一般化錐状特異点をもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ において折り目特異点をもつことである [9].

(4) f が $p \in U$ においてカスプ状バタフライをもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ においてカスプ状 S_1^+ 特異点をもつことである. さらに，極小面は S_1^- 特異点を許容しない [2].

本講演では，3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbb{H}_1^3$ の特異点を許容する時間的平均曲率 1 曲面 (Constant Mean Curvature 1, CMC1) を考察する．ここで，中間符号をもつ 4 次元擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_2^4 = (\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ ($\langle x, x\rangle = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$) に対し，

$$\mathbb{H}_1^3 := \{x \in \mathbb{R}_2^4 \mid \langle x, x\rangle = -1\}$$

を **3 次元反ド・ジッター空間**という．$\mathbb{H}_1^3$ における時間的平均曲率 1 曲面 (時間的 CMC1 曲面) は，3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^3$ の時間的極小曲面と局所等長対応をもつことが知られている (Lawson-Guichard 対応)．よって，$\mathbb{H}_1^3$ の時間的 CMC1 曲面を理解するためには，特異点を許容した枠組みで考えることが重要である．Yasumoto [14] は，3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbb{H}_1^3$ において特異点を持つ時間的 CMC1 曲面を考察し，極小面の双対性 (1), (2) に対応するようなカスプ辺, ツバメの尾, カスプ状交差帽子に対する特異点の双対性を導いた．以上の結果から，極小面の双対性 (3), (4) と同様の双対性が，$\mathbb{H}_1^3$ の場合にも成り立つのかという自然な問題が生じる．

筆者は $\mathbb{H}_1^3$ の特異点を許容する時間的 CMC1 曲面のクラスとして，**時間的** CMC1 **面**を導入し，それらの特異点，とくに，特異点の双対性を考察した．

2 主結果

[8] では，3 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^3$ の極小面に対応するクラスとして 3 次元反ド・ジッター空間 $\mathbb{H}_1^3$ の時間的 CMC1 面を導入した．

定義 1. U を $\check{\mathbb{C}}$ 上の単連結領域，$z_0 \in U$ を基点とする．$g : U \to \check{\mathbb{C}}$ を p-正則関数，$\omega = \hat{\omega}\, dz$ を U 上 p-正則 1 次微分形式とする．このとき，

$$F' = F \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \hat{\omega}, \qquad F(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の解 $F : U \to \mathrm{SL}(2, \check{\mathbb{C}})$ に対し，

$$f(z) := F(z) e_3 F(z)^* \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

により定まる写像 $f : U \to \mathbb{H}_1^3$ を**一般化時間的 CMC1 曲面**という．

(g, ω) の組を **Weierstrass データ**と呼ぶ．また，$(g, j\omega)$ に対応するものを f の**共役時間的 CMC1 曲面**といい，$f^\sharp$ と表す．

注意 2. $\mathbb{H}_1^3$ のはめこまれた時間的 CMC1 曲面は局所的にこのように与えられる [14].

一般化時間的 CMC1 曲面の特異点について，次が成り立つ．

命題 3 ([8])**.** 一般化時間的 CMC1 曲面 $f: U \to \mathbb{H}^3_1$ の特異点 $p \in U$ について，(1) または (2) が成り立つ．

$$(1) \quad g(p)\,\overline{g(p)} = 1, \qquad (2) \quad \omega(p)\,\overline{\omega(p)} = 0.$$

(1) を満たす特異点 p を **g-特異点**, (2) を満たす特異点 p を **ω-特異点**という．時間的 CMC1 面を次のように定義する．

定義 4 ([8]). ω-特異点をもたない一般化時間的 CMC1 曲面を**時間的 CMC1 面**という．

以上の設定のもと，次が成り立つ．

定理 A ([8])**.** $f\colon U \to \mathbb{H}^3_1$ を時間的 CMC1 面，$f^\sharp\colon U \to \mathbb{H}^3_1$ を共役時間的 CMC1 面とする．f が $p \in U$ において一般化錐状特異点をもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ において 5/2-カスプ辺をもつことである．

定理 A により, 時間的 CMC1 面は極小面における特異点の双対性 (3) と同様の性質を持たないことが明らかになった．このことにより, 折り目特異点をもつ時間的 CMC1 面が存在し得るかという問題が生じるが，次が成り立つことがわかった．

定理 B ([8])**.** $\mathbb{H}^3_1$ の時間的 CMC1 面は折り目特異点を許容しない．

さらに，極小面における特異点の双対性 (4) に対応するものとして，ジェネリックなカスプ状バタフライを定義し，次を示した．

定理 C ([8])**.** $f\colon U \to \mathbb{H}^3_1$ を時間的 CMC1 面，$f^\sharp\colon U \to \mathbb{H}^3_1$ をその共役時間的 CMC1 面とする．このとき，f が $p \in U$ においてカスプ状 S_1 特異点をもつための必要十分条件は，$f^\sharp$ が $p \in U$ においてジェネリックなカスプ状バタフライをもつことである．

$\mathbb{R}^3_1$ の極小面の場合にはカスプ状 S_1^- 特異点は存在しないが [2]，$\mathbb{H}^3_1$ の時間的 CMC1 面でカスプ状 S_1^- 特異点を持つ例が存在する (例 16 参照).

3 主結果の証明：Weierstrass データを用いた特異点の判定条件

定理の証明に用いた定義や定理は以下の通りである．

$$\varphi := \frac{g_z}{g^2\hat{\omega}}, \qquad D\varphi := \frac{g}{g_z}\,\varphi_z, \qquad D^2\varphi := \frac{g}{g_z}\,(D\varphi)_z$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

事実 5 (cf. Yasumoto [14])**.** U を $\check{\mathbb{C}}$ の単連結領域とし，$f: U \to \mathbb{H}^3_1$ を時間的 CMC1 面とする．f の *Weierstrass* データを (g, ω) とし，$\omega = \hat{\omega} dz$ と定める．このとき，以下が成り立つ．

(1) 特異点 p が非退化な特異点であるための必要十分条件は $dg(p) \neq 0$ を満たすことである．
(2) 特異点 p において f が波面であるための必要十分条件は，$\mathrm{Re}\,\varphi(p) \neq 0$ を満たすことである．

(3) 特異点 p において f がカスプ辺と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，$\operatorname{Re}\varphi(p) \neq 0$ かつ $\operatorname{Im}\varphi(p) \neq 0$ を満たすことである．

(4) 特異点 p において f がツバメの尾と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，$\varphi(p) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ かつ $\operatorname{Re} D\varphi(p) \neq 0$ を満たすことである．

(5) 特異点 p において f がカスプ状交差帽子と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，$\varphi(p) \in j\mathbb{R} \setminus \{0\}$ かつ $\operatorname{Im} D\varphi(p) \neq 0$ を満たすことである．

定理 A は，次の定理 6 から従う．

定理 6 ([8])**.** 時間的 CMC1 面 $f : U \to \mathbb{H}^3_1$ は *Weierstrass* データ (g, ω) により与えられているとする．特異点 $p \in U$ が一般化錐状特異点であることと次は同値：

$$\operatorname{Re}\varphi(p) \neq 0, \quad \text{かつ} \quad \text{ある}\delta > 0\text{ が存在して，任意の } t \in (-\delta, \delta) \text{ に対して } \operatorname{Im}\varphi(\gamma(t)) = 0.$$

さらに，特異点 $p \in U$ が 5/2-カスプ辺であることと次は同値：

$$\operatorname{Im}\varphi(p) \neq 0, \quad \text{かつ} \quad \text{ある}\delta > 0\text{ が存在して，任意の } t \in (-\delta, \delta) \text{ に対して } \operatorname{Re}\varphi(\gamma(t)) = 0.$$

定理 A により, 時間的 CMC1 面は極小面における特異点の双対性 (3) と同様の性質を持たないことが明らかになった．このことにより, 折り目特異点をもつ時間的 CMC1 面は存在し得るか，という問題が自然に生じる．定理 B は定理 6 の 5/2-カスプ辺の判定条件を用いて証明した．

定理 7 ([8])**.** 時間的 CMC1 面 $f : U \to \mathbb{H}^3_1$ は *Weierstrass* データ (g, ω) により与えられているとする．f が p においてカスプ状バタフライに $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は、p において

$$(1)\, \operatorname{Re}\varphi \neq 0, \qquad (2)\, \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Re}(D\varphi) = 0, \qquad (3)\, \operatorname{Im}(D^2\varphi) \neq 0$$

を満たすことである．また，f が p でカスプ状 $S_1^{\pm}$ 特異点と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は p において

$$(1)\ \operatorname{Im}\varphi(p) \neq 0, \qquad (2)\ \operatorname{Re}\varphi(p) = \operatorname{Im} D\varphi(p) = 0,$$
$$(3)\ \begin{cases} S_1^+ \text{ ならば } \operatorname{Re} D^2\varphi(p)\big(12 - \operatorname{Re} D^2\varphi(p)\big) > 0, \\ S_1^- \text{ ならば } \operatorname{Re} D^2\varphi(p)\big(12 - \operatorname{Re} D^2\varphi(p)\big) < 0 \end{cases}$$

を満たすことである．

ここでジェネリックなカスプ状バタフライを定義する．

定義 8 ([8]). $\operatorname{Im} D^2\varphi(p) \neq 12$ を満たすとき, カスプ状バタフライが**ジェネリック**であると言う．

定理 7 より定理 C が導かれる．

4 実 Weierstrass データを用いた時間的 CMC1 面の構成

[8] では，実 Weierstrass データを用いた $\mathbb{H}^3_1$ の時間的 CMC1 曲面に対する Bryant 型表現公式を構成した．これにより，定理 6, 定理 7 で得た特異点の判定条件を実 Weierstrass データを用いて再

構成した．一般に，p-正則 Weierstrass データを用いて時間的 CMC1 面の具体例を考えることは容易ではないため，実 Weierstrass データを用いることで曲面の具体例を与えた．

g_1 を開区間 I 上の C^∞ 級関数，$\omega_1 = \hat{\omega}_1\,du$ を開区間 I 上の C^∞ 級 1 次微分形式，g_2 を開区間 J 上の C^∞ 級関数，$\omega_2 = \hat{\omega}_2\,dv$ を開区間 J 上の C^∞ 級 1 次微分形式とする．

$$F_1^{-1}(F_1)_u = \begin{pmatrix} -g_1 & -1 \\ g_1^2 & g_1 \end{pmatrix} \hat{\omega}_1, \quad F_2^{-1}(F_2)_v = \begin{pmatrix} g_2 & -1 \\ g_2^2 & -g_2 \end{pmatrix} \hat{\omega}_2$$

の解を $F_1 : I \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $F_2 : J \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ とする．このとき，

$$f(u,v) := F_1(u)F_2(v)^t$$

で定義される写像 $f : I \times J \to \mathbb{H}^3_1$ は，$\mathbb{H}^3_1$ の一般化された時間的 CMC1 曲面を与える．さらに，ω_1, ω_2 が零点を持たないとき，f は時間的 CMC1 面を定める．ここで，$\mathbb{H}^3_1$ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ と同一視する．

定義 9. $(g_1, g_2, \omega_1, \omega_2)$ を，$\mathbb{H}^3_1$ における時間的 CMC1 面 f の**実 Weierstrass データ**という．

共役時間的 CMC1 面 $f^\sharp$ の実 Weierstrass データは，$(g_1, g_2, \omega_1, -\omega_2)$ により与えられる．

4.1 実 Weierstrass データを用いた特異点の判定条件

定理 10 ([8])**.** 時間的 CMC1 面 $f : U \to \mathbb{H}^3_1$ は実 *Weierstrass* データ $(g_1, g_2, \omega_1, \omega_2)$ により与えられているとする．このとき，次が成り立つ：

(1) $p = (a,b) \in U$ が f の特異点であるための必要十分条件は，$g_1(a)g_2(b) = 1$ を満たすことである．

(2) 特異点 $p \in U$ において f がカスプ辺に $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} \neq 0, \qquad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} \neq 0$$

が p において成り立つことである．

(3) 特異点 $p \in U$ において f がツバメの尾に $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} \neq 0, \qquad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} = 0,$$

$$\frac{g_1}{(g_1)_u}\left(\frac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u - \frac{g_2}{(g_2)_v}\left(\frac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v \neq 0$$

が p において成り立つことである．

(4) 特異点 $p \in U$ において f がカスプ状交差帽子に $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，

$$\frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} = 0, \qquad \frac{(g_1)_u}{(g_1)^2\hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{(g_2)^2\hat{\omega}_2} \neq 0$$

$$\frac{g_1}{(g_1)_u}\left(\frac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u + \frac{g_2}{(g_2)_v}\left(\frac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v \neq 0$$

が p において成り立つことである．

定理 11 ([8])**.** 時間的 CMC1 面 $f : U \to \mathbb{H}^3_1$ は 実 *Weierstrass* データ $(g_1, g_2, \omega_1, \omega_2)$ により与えられているとする．$\gamma(t)$ を f の $p = \gamma(0)$ を通る特異曲線とする．このとき，f が p において一般化錐状特異点に $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は次で与えられる：

(1) p において $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} - \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} \neq 0$, かつ,

(2) ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $t \in (-\delta, \delta)$ に対して，$\gamma(t)$ に沿って $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} + \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} = 0.$

さらに，f が p において 5/2-カスプ辺と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は次で与えられる：

(1) p において $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} + \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} \neq 0$, かつ,

(2) ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $t \in (-\delta, \delta)$ に対して，$\gamma(t)$ に沿って $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} - \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} = 0.$

定理 12 ([8])**.** 時間的 CMC1 面 $f : U \to \mathbb{H}^3_1$ は 実 *Weierstrass* データ $(g_1, g_2, \omega_1, \omega_2)$ により与えられているとする．f が p においてカスプ状バタフライに $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，p において次の (1), (2), (3) が成り立つことで与えられる：

(1) $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} - \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} \neq 0,$

(2) $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} + \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} = 0,\ \dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u - \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v = 0,$

(3) $\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u\right)_u + \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v\right)_v \neq 0.$

さらに，f が p でカスプ状 $S_1^{\pm}$ 特異点と $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は，p において次の (1), (2), (3) が成り立つことで与えられる：

(1) $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} + \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} \neq 0,$

(2) $\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1} - \dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2} = 0,\ \dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u + \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v = 0,$

(3) S_1^+ ならば，$0 < \dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u\right)_u - \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v\right)_v < 12,$

S_1^- ならば，$0 > \dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u\right)_u - \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v\right)_v$

または $\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{g_1}{(g_1)_u}\left(\dfrac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}\right)_u\right)_u - \dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{g_2}{(g_2)_v}\left(\dfrac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}\right)_v\right)_v > 12.$

4.2 時間的 CMC1 面の具体例

最後に，実 Weierstrass データを用いて構成した時間的 CMC1 面の具体例を紹介する．

例 13 (Enneper 型時間的 CMC1 面)．$\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし，$F_1, F_2 : \mathbb{R}^\times \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ を

$$F_1(u) := \begin{pmatrix} \cos u & \sin u - u\cos u \\ -\sin u & u\sin u + \cos u \end{pmatrix}, \qquad F_2(v) := \begin{pmatrix} \cos v & \sin v - v\cos v \\ -\sin v & v\sin v + \cos v \end{pmatrix}$$

とおく．実 Weierstrass データは

$$g_1 = -\frac{1}{u}, \quad \omega_1 = -u^2, \quad g_2 = \frac{1}{v}, \quad \omega_2 = -v^2$$

となり，時間的 CMC1 面 $f(u,v) := F_1(u)F_2(v)^t$ に対して，特異曲線 $\gamma(u) = (u, -1/u)$ 上で $\gamma(u)$ $(u \neq \pm 1)$ は全てカスプ辺である．さらに，$\gamma(u)$ $(u = \pm 1)$ はどちらもツバメの尾である．

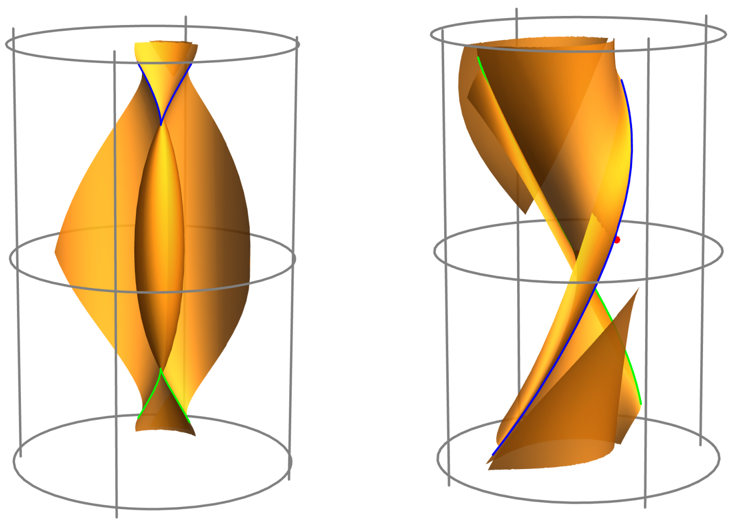
例 14 (Enneper 型時間的 CMC1 面の共役曲面 [8])．$\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし，$F_1, F_2 : \mathbb{R}^\times \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ を

$$F_1(u) := \begin{pmatrix} \cos u & \sin u - u\cos u \\ -\sin u & u\sin u + \cos u \end{pmatrix}, \qquad F_2^\sharp(v) := \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v - v\cosh v \\ \sinh v & \cosh v - v\sinh v \end{pmatrix}$$

とおく．実 Weierstrass データは

$$g_1 = -\frac{1}{u}, \quad \omega_1 = u^2, \quad g_2^\sharp = \frac{1}{v}, \quad \omega_2^\sharp = v^2$$

となり，時間的 CMC1 面 $f^\sharp(u,v) := F_1(u)F_2^\sharp(v)^t$ に対して，特異曲線 $\gamma(u) = (u, -1/u)$ 上で $\gamma(u)$ $(u \neq \pm 1)$ は全てカスプ辺である．さらに，$\gamma(u)$ $(u = \pm 1)$ はどちらもカスプ状交差帽子である．



左：Enneper 型時間的 CMC1 面 (例 13)，右：Enneper 型時間的 CMC1 面の共役曲面 (例 14)．

例 15 (カテノイド型時間的 CMC1 面，ヘリコイド型時間的 CMC1 面 [8])．$\alpha, \beta > -1/2$ をみたす実数 α, β に対し，$F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ を

$$F_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \begin{pmatrix} (\alpha+1)e^{\alpha u} & \alpha\, e^{(\alpha+1)u} \\ \alpha\, e^{(-\alpha-1)u} & (\alpha+1)\, e^{-\alpha u} \end{pmatrix},$$

$$F_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2\beta+1}} \begin{pmatrix} -(\beta+1)e^{\beta v} & \beta\, e^{(\beta+1)v} \\ \beta\, e^{(-\beta-1)v} & -(\beta+1)\, e^{-\beta v} \end{pmatrix}$$

とおく．実 Weierstrass データは，

$$g_1(u) = e^{-u}, \qquad g_2(v) = e^{-v}, \qquad \omega_1 = -\alpha(\alpha+1)e^u\, du, \qquad \omega_2 = \beta(\beta+1)e^v\, dv$$

となる．時間的 CMC1 面 $f(u,v):=F_1(u)F_2(v)^t$ に対し，特異曲線 $\gamma(u)=(u,-u)$ 上で

$$\frac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}-\frac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{\beta(\beta+1)},\qquad \frac{(g_1)_u}{g_1^2\hat{\omega}_1}+\frac{(g_2)_v}{g_2^2\hat{\omega}_2}=\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}-\frac{1}{\beta(\beta+1)}$$

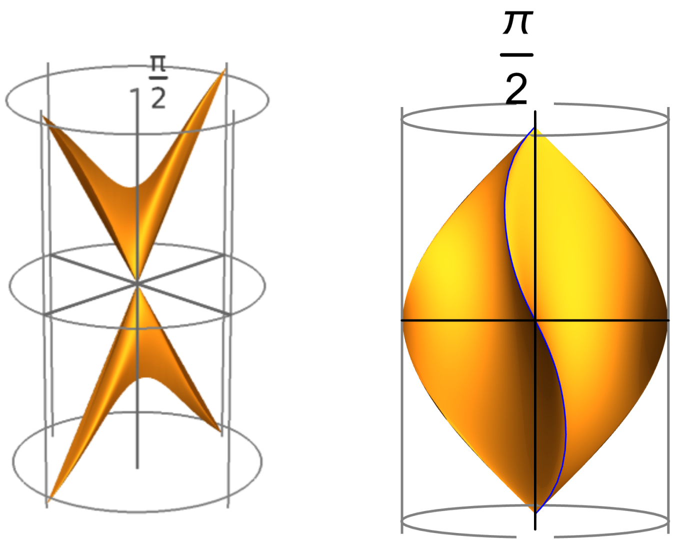
より，

(a) $\alpha=\beta$ のとき，$\gamma(u)$ は一般化された錐状特異点 (このとき，f を**カテノイド型時間的 CMC1 面**と呼ぶ).

(b) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{1-4\beta^2-4\beta}}{2}$ $(-\dfrac{1}{2}<\beta<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})$ のとき，$\gamma(u)$ は 5/2-カスプ辺 (このとき，f を**ヘリコイド型時間的 CMC1 面**と呼ぶ).

(c) (a), (b) 以外のとき, カスプ辺

である．



左：カテノイド型時間的 CMC1 面，右：ヘリコイド型時間的 CMC1 面の共役曲面 (例 15).

カスプ状バタフライとカスプ状 $S_1^{\pm}$ 特異点をもつ時間的 CMC1 面の存在は次のように示される．

例 16 ([8])．実数 c_0,c_1,c_2,d_0,d_1,d_2 $(c_0,d_0\neq 0)$ に対して，$h_1,h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$h_1(u)=c_0+c_1u+\frac{c_2}{2}u^2,\qquad h_2(v)=d_0+d_1v+\frac{d_2}{2}v^2$$

とおく．$I:=\{u\in\mathbb{R}\mid h_1(u)\neq 0\}$, $J:=\{v\in\mathbb{R}\mid h_2(v)\neq 0\}$ と定める．実 Weierstrass データを

$$g_1=e^u,\quad \hat{\omega}_1(u)=\frac{1}{e^uh_1(u)},\qquad g_2(v)=e^v,\quad \hat{\omega}_2=\frac{1}{e^vh_2(v)}$$

とおく．このとき，特異点 $(u,v)=(0,0)$ は

(a) $c_0=-d_0$ かつ $c_1=d_1$ かつ $c_2+d_2\neq 0$ のときカスプ状バタフライ，

(b1) $c_0=d_0$ かつ $c_1=-d_1$ かつ $0<c_2-d_2<12$ のとき，カスプ状 S_1^+ 特異点,

(b2) $c_0 = d_0$ かつ $c_1 = -d_1$ かつ $c_2 - d_2 < 0$ または $12 < c_2 - d_2$ のとき，カスプ状 S_1^- 特異点となる．

参考文献

[1] Akamine S., *Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities*, Hokkaido Math. J. **48** (2019), 537–568.

[2] Akamine, S., *Singularities of generalized timelike minimal surfaces in Lorentz–Minkowski 3-space*, preprint, arXiv:2408.00313 (2024).

[3] Kokubu M., Rossman K., Saji M., Umehara M., Yamada K., *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. Soc. **221** (2005), 303–352.

[4] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Result. Math. **56** (2009), 41–82.

[5] Fujimori S., Saji K., Umehara M. and Yamada K., *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.

[6] Honda A., Koiso M., and Saji K., *Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **47** (2018), 245–267.

[7] Honda, A. and Sato, H., *Singularities of spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter space*, preprint, arXiv:2103.13849 (2021).

[8] Isaka M., *Duality of singularities for timelike mean curvature one surfaces in anti-de Sitter space* (in Japanese), Master thesis, Yokohama National University (2026).

[9] Kim, Y. W., Koh, S.-E., Shin, H. and Yang, S.-D., *Spacelike maximal surfaces, timelike minimal surfaces, and Björling representation formulae*, J. Korean Math. Soc. **48** (2011), no. 5, 1083–1100.

[10] Konderak J. J., *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), 319–332.

[11] Lee, S., *Timelike surfaces of constant mean curvature* ± 1 *in anti-de Sitter* 3*-space*, Ann. Global Anal. Geom. **29** (2006), no. 4, 355–401.

[12] Takahashi H., *Timelike minimal surfaces with singularities in three-dimensional spacetime* (in Japanese), Master thesis, Osaka University (2012).

[13] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman, Series in Algebraic and Differential Geometry, 1, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2022.

[14] Yasumoto M., Weierstrass-type representations for timelike surfaces, in *Singularities in generic geometry*, 449–469, Adv. Stud. Pure Math., 78, Math. Soc. Japan, Tokyo.